Modelado matemático de nanosatélites

1st Franklin Josue Ticona Coaquira
Matemática
Universidad Mayor de San Andrés
La Paz, Bolivia
fticonac@fcpn.edu.bo

***Abstract*—Este documento presenta un resumen extendido sobre la propuesta de exposición ”Modelado matemático de Nanosatélites” para el aniversario de la carrera de Matemática UMSA, la exposición no abarcará aspectos rigurosos matemáticos, sino explicará la importancia del conocimiento matemático para poder modelar la parte mecánica y electromecánica de un nanosatélite.**

***Index Terms*—Nanosatélite, Física, Álgebra Lineal, Modelado matemático.**

I. Expositor

- Univ. Franklin Josue Ticona Coaquira.

II. Antecedentes

Los nanosatélites son satélites cuya masa se encuentra en el rango de $1[kg]$ a $10[kg]$, el nanosatélites más común se denomina cubesat ¿qué es un cubesat?.
El particular diseño de un satélite Cubesat fue propuesto con un fin netamente experimental gracias a la colaboración entre la Universidad Estatal Politécnica de California y la Universidad de Standford. El mismo fue construido para conocer de forma práctica la construcción y lanzamiento de un satélite de bajo costo en relación a uno de tamaño original. Posteriormente, se encontró un gran potencial en su compactes, pues su peso no representa un excesivo consumo de combustible. De esta forma, sus ventajas principales son la reducción de los costos asociados al lanzamiento del mismo y optimización de combustible en el lanzamiento de varios cubesats con un solo cohete. Por otra parte, los componentes electrónicos propios del cubesat son pequeños y susceptibles a la radiación y, por ende, no son capaces de transportar grandes cargas. Después de más de dos décadas desde sus inicios, los cubesats se desarrollaron de forma comercial incluyendo proyectos como la implementación de “enjambres” de cubesats para la observación de la Tierra. Es más, los cubesat pueden ser aplicados en el reconocimiento de lugares de aterrizaje, campos de gravedad, campos magnéticos y mediciones de radiación.

III. Formulación matemática del problema

Según la teoría de control, es posible controlar ciertas variables dinámicas de un sistema dinámico si se conoce el modelo matemático del sistema (en este caso un nanosatélite), una

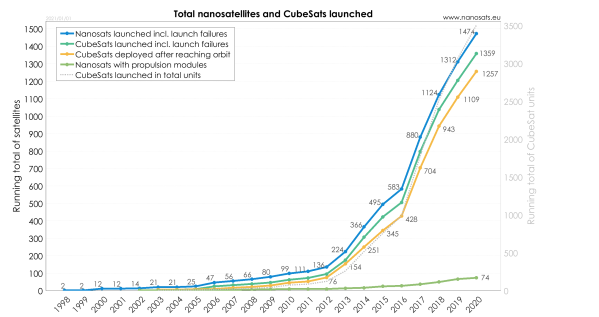


Fig. 1. Hasta el 1 enero del 2021 se lanzaron 1357 cubesats, denotando un crecimiento exponencial en la producción y el interés con fines investigativos de los mismos.

forma de representar matemáticamente un sistema dinámico cualquiera es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = X(x(t), u(t)) \tag{1}$$

Donde $X \in \mathcal{R}^6$ es una variedad diferenciable (pues se supone que las magnitudes físicas son continuas y derivables) y además, $u(t)$ suele ser modelar a una fuerza $\vec{F}$ o un torque $\vec{\tau}$ aplicado directamente al sistema dinámico-mecánico.
La única variable dinámica en la que se tiene control (a través de sistemas dinámicos electrónicos) es $u(t)$, en satélites de mayor dimensión se suelen tener propulsores para cambiar la posición del centro de masa del satélite, en el caso de nanosatélites se poseen actuadores pequeños que modifican el valor de $u(t)$, a priori estos actuadores no son capaces de controlar todo el vector $x(t)$, y solamente la posición angular del cubesat, cuando se requiere controlar la posición angular de un satélite, este suele llamarse attitude control, ¿de qué sirve el attitude control?.

- Recarga de energía eléctrica óptima del nanosatélite a través de celdas solares.
- Envío de información a través de ondas electromagnéticas a diferentes estaciones.

Ahora veamos los modelos matemáticos más comunes para el actuador de un cubesat.

A. Ruedas de reacción

Las ruedas de reacción son uno de los actuadores más empleados para el control de attitude, su funcionamiento se

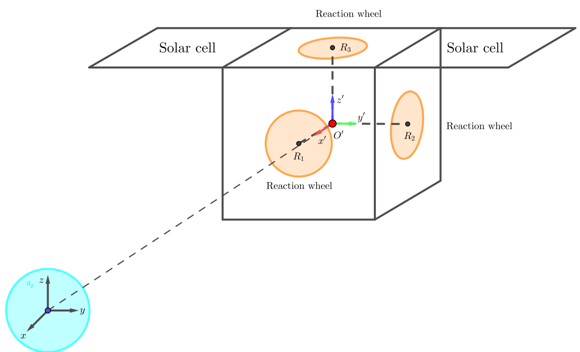


Fig. 2. Diagrama cinemático cubesat

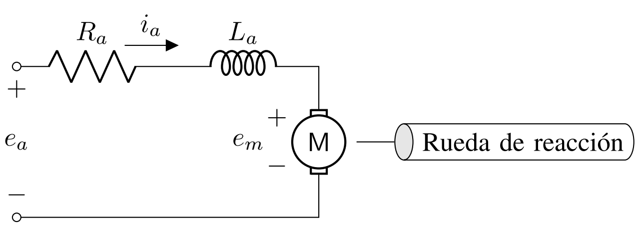
basa en la tercera de Newton aplicada a torques (torque de reacción). Existen diversas configuraciones geométricas para las ruedas de reacción de un cubesat, la configuración presentada en 2, se denomina configuración ortogonal.
Si tomamos como referencia el modelo matemático de attitude de un cubesat:

$$I\dot{\vec{\omega}} = -\vec{\omega} \times (I\vec{\omega} + h_\omega) + T_d(t) - \dot{h}_\omega \tag{2}$$

Con $\vec{\omega}$ vector de velocidad angular y h_ω vector de torque generado por las ruedas de reacción $h_\omega = TI_R\vec{\omega}_R$, debido a la configuración ortogonal de las ruedas de reaccíon, puede demostrarse que la matriz T toma la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La dinámica del vector $\vec{\omega}_R$ puede obtenerse mediante el siguiente esquema electromecánico de un motor:



Los componentes eléctricos son modelados por las leyes de Kirchhoff, ley de Ohm, ley de Faraday y modelos matemáticos específicos para componentes electrónicos, por ejemplo el modelo de caída de tensión para un inductor viene dado por:

$$v_L = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

Donde $i(t)$ es corriente y L la inductancia del inductor (que depende de su geometría y agentes externos). Para un capacitor:

$$v_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \tag{5}$$

Donde C es la capacitancia del capacitor (que también depende de su geometría y agentes externos). Debido a que e_a es una señal PWM (alta frecuencia), este se aproxima mediante su valor RMS, de este modo:

$$e_a = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{0}^{T} e_a^2(t)dt} \tag{6}$$

Integrado obtenemos que:

$$e_a = \sqrt{D}V \tag{7}$$

Donde $D \in [0, 1]$ es el duty cycle de la señal PWM (entrada de control) y V es el voltaje suministrado al puente H, hasta el momento se han descrito las leyes y modelos empleados para modelar el vector dinámico de control $u(t)$, pero, desconocemos totalmente como se ha obtenido la ecuación que modela la dinámica del nanosatélite (2), para entender de forma rigurosa como se halla este modelo matemático debemos abarcar unos conceptos físicos básicos.

B. Dinámica del cuerpo rígido

Un sistema mecánico rígido es un conjunto de cuerpos rígidos que están conectados a través de ligaduras, a su vez un cuerpo rígido puede modelarse como un conjunto finito de partículas, llamémosle S este cuerpo rígido cumple con las siguientes propiedades:

- Cada partícula de S obedece las leyes de Newton.
- Todo par de partículas $A_i \in S$ y $A_j \in S$ verifican la siguiente propiedad vectorial en $\mathcal{R}^3$:

  $$|\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_{A_j}| = ctte \tag{8}$$

  Donde $\vec{r}_{A_x}$ denota el vector posición de la partícula A_x respecto a un sistema de referencia.

A partir de la 2da ley de Newton (sistema de 3 ecuaciones diferenciales de 2do orden):

$$\sum_{i=1}^{k} \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_A \tag{9}$$

Y aplicándola a cada de partícula de S, obtenemos la dinámica de S, sin embargo, aplicar directamente las leyes de Newton a cada partícula de S, resulta ser un modelado muy complicado de manejar pues si consideramos que S tiene N partículas, se generan $3N$ ecuaciones diferenciales, por el número de Avogadro sabemos que la cantidad de partículas de un cuerpo está en el orden de 10^{23}, por lo que obtendríamos una cantidad similar de ecuaciones diferenciales.
La mecánica y mecánica clásica se han encargado de establecer técnicas de modelado matemático de este tipo de sistemas a partir de definiciones como ser:

- Centro de masa cm donde: $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$, m_i es la masa de la $i-esima$ partícula.
- Tensor de inercia: $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$, el tensor de inercia resulta ser una matriz bastante interesante, pues resulta ser una matriz semidefinida positiva.

Si bien existen otras variables matemáticas que intervienen en el modelo dinámico-mecánico de un nanosatélite, los presentados en este documento son fundamentales para empezar a profundizar en este tema latente.

IV. Conclusiones

El modelado matemático de nanosatélites requiere de una formación profunda en matemática y física, incluso el conocimiento matemático no solo se aplica para controlar estos sistemas sino también para eliminar el ruido de medición de los sensores (a través de la resolución de un problema de optimización en tiempo real), establecer algoritmos de inteligencia artificial para la comunicación de varios nanosatélites y otros.