Un Paso Más Cerca Del Infinito

Jazmín Daniela Jiménez Ulloa

Universidad Mayor de San Andrés
(UMSA)

Resumen

El pensar en el infinito puede llegar a ser complicado, pues es un concepto bastante abstracto. Incluso, a inicios del siglo XX, aún no era totalmente entendido.

Se abordara esta idea de manera que resulte más natural entenderla, partiendo de algo tan intuitivo como el principio del palomar y usándolo para estudiar la cardinalidad en los casos finitos. Esto para tomar los casos finitos como base, pues al ser entendidos, las definiciones dadas para el caso general son mucho más naturales, y por ende, más manejables. Con esta herramienta, se aventura a los conjuntos infinitos, partiendo de los infinitos numerables, y llegando mediante la diagonal de cantor a explorar unos nuevos conjuntos aún mas grandes llamados infinitos no numerables. Más la travesía no se detiene ahí, pues usando el teorema de Cantor se llega a encontrar infinitos que sobrepasan a los anteriores.

Los conceptos y teoremas presentes son sorprendentes por si mismos, pero siempre se puede lograr ver más allá de lo presentado en este documento. Si existe una duda, no se le debe temer, pues la magia de la matemática reside ahí. Al plantear un problema se abre un nuevo mundo para la persona, y si es un problema nunca antes planteado, se abre un nuevo mundo para todos. Citando a Georg Cantor: "En matemáticas el arte de proponer una pregunta debe ser de mayor valor que su resolución."

Palabras clave: conjunto, cardinalidad, finito, infinito

Índice

1. Conjuntos finitos

El contar objetos es algo muy natural para todos nosotros, pues lo hicimos desde nuestra mas tierna infancia, y bueno ¿quien no contó sus dedos?. Sabemos que nuestros manos tienen la misma cantidad de dedos pues sabemos que en cada mano tenemos 5 dedos.

Pero, si no tuviéramos la posibilidad de contar, ¿como podríamos saber que ambas manos tienen la misma cantidad de dedos?. Permíteme decirte, que la matemática tiene la respuesta.

1.1. Definiciones

Sea $f : A \to B$

- Un conjunto A tiene cardinalidad finita $\Leftrightarrow$ A tiene finitos elementos
- Sea A un conjunto de cardinalidad finita. La cardinalidad de A se define como la cantidad de elementos que tiene este conjunto. (Notación: $|A|$)
- f es inyectiva $\Leftrightarrow$ Si $b_1 \neq a_2$, entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$ $\Leftrightarrow$Si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $a_1 = a_2$
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ Para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva

1.2. Principio del Palomar

Se cree que Dirichlet fue quien enuncio el principio del palomar, el cual al entenderse de una manera coloquial se ve evidente. Sin embargo, que algo sea simple de ver no implica para nada que esto no pueda ser útil para cosas mas complicadas.

Teorema 1. *Principio del Palomar*
Sean A, B conjuntos de cardinalidad finita. Si $|A| < |B|$, entonces no existe $f : B \to A$ inyectiva.

Demostración. (Contrapositivo) Debemos demostrar que: *Sean A, B conjuntos de cardinalidad finita. Si existe $f : B \to A$ inyectiva, entonces $|B| \leq |A|$*

Sea $f : B \to A$ inyectiva, por definición de función sabemos que para todo $b \in B$, existe un $a \in A$ tal que $f(b) = a$

Veamos dos casos:

- Si B es vacío, por definición de función, A es vacío, y se cumple $|B| = |A|$, por ende $|B| \leq |A|$
- Si B es distinto de vacío. Sea $|B| = n$. Tomemos todos los elementos de B, al ser finitos, estos son $b_1, b_2, \ldots, b_n$.
  Al ser f inyectiva, $f(b_i) \neq f(b_j)$ para $i \neq j$, por lo que tenemos n elementos distintos en Imf (la imagen de f), y estos elementos están en A, por lo que $n \leq |A|$, que es lo mismo que decir que $|B| \leq |A|$

■

El principio del palomar puede ser entendido coloquialmente como: *Tenemos (finitas) palomas descansando en (finitos) nidos. Si hay mas palomas que nidos, entonces no importa como están ordenadas las palomas, en un nido siempre habrán al menos dos palomas.*

De hecho, esto es equivalente a decir: *Tenemos (finitas) palomas descansando en (finitos) nidos. Si tenemos una forma de ordenar a las palomas en los nidos donde en cada nido hay máximo una paloma, entonces la cantidad de palomas es menor o igual a la cantidad de nidos.*

1.3. Relación entre Principio del Palomar y Biyectividad

Teorema 2. *Sean A y B conjuntos de cardinalidad finita. Existe una $f : A \to B$ biyectiva* $\Leftrightarrow |A| = |B|$

Demostración. Hagamos ambas implicancias

- $\Rightarrow$
  Como f es biyectiva, entonces es inyectiva, por lo que por el contrapositivo del Principio del Palomar $|A| \leq |B|$
  Ahora, sea $b \in B$ como f es sobreyectiva, existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$ tomemos la función $g : B \to A$ tal que $g(b) = a$.
  Veamos que si $g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow b_1 = b_2$
  Entonces, g es inyectiva, por lo que por el contrapositivo del Principio del Palomar $|B| \leq |A|$
  Uniendo ambas desigualdades que tenemos (y sabiendo A y B son finitos) concluimos que $|A| = |B|$

- $\Leftarrow$

  Como $|A| = |B| = n$. Sean $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

  Tomemos $f : A \to B$ tal que $f(a_i) = b_i$, con $1 \leq i \leq n$.

  Se deja como ejercicio al lector demostrar que esta función es biyectiva

■

En el caso finito viéndolo con palomas y nidos tenemos que: *Hay alguna forma de ordenar de ordenar a las palomas en los nidos tal que cada nido tenga una y solo una paloma* $\Leftrightarrow$ *La cantidad de palomas es igual a la cantidad de nidos*

Ahora, podemos responder la pregunta que se hizo al principio de esta sección. Si no tuviéramos la posibilidad de contar, ¿como podríamos saber que ambas manos tienen la misma cantidad de dedos? Pues, todo lo que debemos hacer es "asociar" a cada dedo de una mano, uno y solo uno de la otra mano. Por ejemplo, índice con índice, medio con medio, anular con anular, meñique con meñique y pulgar con pulgar.

2. Cardinalidad de conjuntos

Estudiamos los casos de los conjuntos finitos, y sacamos conclusiones bastante lindas. Pero, ¿será que la definición de cardinalidad se limita a los conjuntos finitos? ¡Pues no!. Cantor dio una definición para determinar si dos conjuntos cualesquiera tienen la misma cardinalidad, que de hecho coincide con lo que demostramos para el caso finito, y podemos entenderlo de la misma manera.

Definición 1. *Igualdad de cardinalidad de conjuntos*
Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad $\Leftrightarrow$ *Existe una $f : A \to B$ biyectiva. (Notación. $|A| = |B|$)*

Es mas, también tenemos la definición de cuando la cardinalidad de un conjunto es menor estricta que la cardinalidad de otro conjunto. La podemos entender como un palomar donde no tenemos funciones biyectivas.

Definición 2. *Cardinalidad estrictamente menor*
Sean A y B conjuntos. A tiene cardinalidad estrictamente menor que la cardinalidad de B
$\Leftrightarrow$ *Existe $f : A \to B$ inyectiva, y no existe ninguna $g : A \to B$ biyectiva.*
Notación: $|A| < |B|$

Ahora teniendo esta definición en mente. Cantor dio una forma de clasificación para los conjuntos infinitos. Ahí viene la pregunta de porqué lo habrá hecho si solo tenemos un infinito...¿verdad?

3. Conjuntos infinito numerables

Definición 3. *Conjunto infinito numerable*
Un conjunto A es infinito numerable $\Leftrightarrow |A| = |\mathbb{N}|$

Esta es la primera clasificación por cardinalidad que tenemos de conjuntos infinitos, es bastante interesante, pero solo con ella no podemos hacer mucho en temas de demostraciones. Así que lo que haremos será combinar esta definición con la definición de cardinalidad vista en la sección anterior, obteniendo lo siguiente.

Un conjunto A es infinito numerable $\Leftrightarrow$ *Existe una $f : A \to \mathbb{N}$ biyectiva*

Veamos algunos ejemplos:

- El conjunto de los números pares positivos es infinito numerable

  Demostración. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números pares positivos, tomemos la siguiente función. $f : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, tal que $f(x) = \frac{x}{2}$. Demostremos que esta función es biyectiva

  - Inyectiva:
    Sean $x, y \in \mathbb{P}$ tal que $f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad x = y$

- Sobreyectiva: Sea $x \in \mathbb{N}$, veamos que $2x \in \mathbb{P}$ y que $f(2x) = \frac{2x}{2} = x$

$\Rightarrow f$ es biyectiva, por lo que el conjunto de los números pares positivos es finito numerable

■

- El conjunto de los números enteros es infinito numerable

  Demostración. Tomemos la siguiente función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, tal que

$$f(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 0 \\ \\ 2x+1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

  Se deja como ejercicio al lector probar que esta función es biyectiva.

  Teniendo que f es biyectiva, concluimos que el conjunto de los números enteros es infinito numerable.

■

4. Un infinito no numerable

Cantor estudió los conjuntos infinitos y realizó importantes descubrimientos sobre ellos. El siguiente resultado es uno que cambio la forma de ver los infinitos.

Teorema 3. *El intervalo (0,1) no es numerable*

Demostración. (Contradicción) [1]
Asumamos que (0,1) es numerable, entonces existe $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ biyectiva. Es decir, $(0,1) = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$. Como f es una función, tenemos que para $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ es un número entre 0 y 1.

La notación siguiente se entiende como $f(i) = 0.b_{i0}b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{in}\ldots$
(Por ejemplo en f(7)=0.36957... tenemos que b_{73}*=9)*

$$\begin{aligned} f(0) &= 0.b_{00}b_{01}b_{02}b_{03}\ldots b_{0n}\ldots \\ f(1) &= 0.b_{10}b_{11}b_{12}b_{13}\ldots b_{1n}\ldots \\ f(2) &= 0.b_{20}b_{21}b_{22}b_{23}\ldots b_{2n}\ldots \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ f(n) &= 0.b_{n0}b_{n1}b_{n2}b_{n3}\ldots b_{n}\ldots \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

construyamos $x \in (0,1)$ de la manera siguiente:

$$x = 0, x_0x_1x_2x_3\ldots x_n\ldots$$

Tal que $\forall n \in \mathbb{N}_0, x_n \neq b_{nn}$. Por ejemplo:

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } b_{nn} \neq 1 \\ 0 & \text{si } b_{nn} = 1 \end{cases}.$$

Veamos que x esta hecho de tal forma que $x \neq f(i) \ \forall i \in \mathbb{N}_0$, y ademas, $x \in (0,1)$. Esto nos dice que f no es sobreyectiva, pero al ser f biyectiva, debe ser sobreyectiva. $\rightarrow\leftarrow$
De esta forma, concluimos que $(0,1)$ no es numerable

■

Con esto se logró ver que no había un solo infinito como se creía anteriormente. Además que esto nos explica porque Cantor decidió clasificar los conjuntos infinitos.

5. Conjuntos infinito no numerables

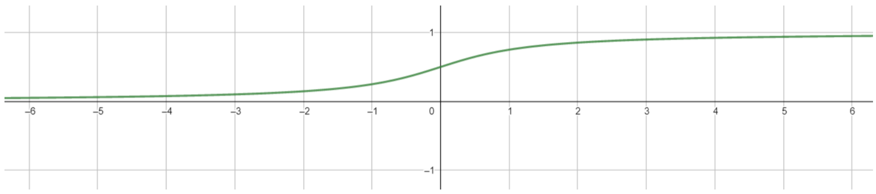
Ahora introduciremos la otra parte de la clasificación por cardinalidad de los conjuntos infinitos, con la cual ya se abarcan todos los conjuntos infinitos

Definición 4. *Conjuntos infinito no numerables*
Un conjunto A es infinito no numerable $\Leftrightarrow$ A no es finito y A no es infinito numerable

Veamos algunos ejemplos de conjuntos infinito no numerables:

- El intervalo (0,1) es infinito no numerable
- El conjunto de los reales es infinito no numerable

Demostración. Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ tal que $f(x) = (\arctan(x) + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\pi}$



El gráfico nos da la fuerte impresión de que es biyectiva, pero debemos demostrarlo. Así que manos a la obra.

- Inyectiva
Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f(y) \Rightarrow (\arctan(x) + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\pi} = (\arctan(y) + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\pi}$
$\Rightarrow \arctan(x) + \frac{\pi}{2} = \arctan(y) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctan(x) = \arctan(y) \Rightarrow x = y$
- Sobreyectiva
Sea $x \in (0,1)$. Tomemos y=tan($x \cdot \pi - \frac{\pi}{2}$)($\in \mathbb{R}$).
Veamos que $f(y) = (\arctan(\tan(x \cdot \pi - \frac{\pi}{2})) + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\pi} = (x \cdot \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{1}{\pi} = x \cdot \pi \cdot \frac{1}{\pi} = x$
(Para encontrar ese valor tan particular de y lo que se hace es tomar $f(y) = x$, y despejar y en dicha ecuación)

Como demostramos que f es biyectiva, entonces $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, y como $(0,1)$ es infinito no numerable, $|\mathbb{R}|$ también lo es.

■

Hasta ahora vimos la cardinalidad de algunos de los conjuntos numéricos de toda la vida. De hecho, es demostrable que los racionales son numerables, y tanto los irracionales como los complejos tienen la misma cardinalidad de los reales. ¿Sera que los infinitos solo pueden tener la misma cardinalidad de los naturales o los reales?

6. Infinitos aun mas grandes

De momento tenemos dos cardinalidades de los conjuntos infinitos. Aunque este es un gran hallazgo, Cantor no se detuvo ahí, pues hizo una demostración que es aun mas sorprendente que lo visto hasta ahora. Para estudiarla necesitamos definir lo siguiente.

Definición 5. *Conjunto de partes*
El conjunto de partes de un conjunto A es aquel cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Notación: $\mathbb{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

Veamos un par de ejemplos para asimilar mejor este concepto:

- Sea $A = \{\bigstar, \Diamond\} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{\bigstar\}, \{\Diamond\}, \{\bigstar, \Diamond\}\}$
- Sea $B = \{\spadesuit, \$, \heartsuit\} \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \{\emptyset, \{\spadesuit\}, \{\$\}, \{\heartsuit\}, \{\spadesuit, \$\}, \{\spadesuit, \heartsuit\}, \{\$, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \$, \heartsuit\}\}$

6.1. Teorema de Cantor

Teorema 4. *(Teorema de Cantor). Sea A un conjunto cualquiera. $|A| < |\mathbb{P}(A)|$.*

Demostración. Para completar la demostración debemos mostrar que existe $g : A \to \mathbb{P}(A)$ inyectiva, y que no existe $f : A \to \mathbb{P}(A)$ biyectiva.

- Existe $g : A \to \mathbb{P}(A)$ inyectiva

  Tomemos $g : A \to P(A)$ tal que $g(a) = \{a\}$.

  Veamos que es inyectiva, pues si $g(a) = g(b) \;\Rightarrow\; \{a\} = \{b\} \;\Rightarrow\; a = b$

- No existe $f : A \to \mathbb{P}(A)$ biyectiva [1]

  (Contradicción). Supongamos que existe $f : A \to \mathbb{P}(A)$ biyectiva

  Definamos $B = \{x \in A : x \notin Imf\}$ Como $B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{P}(A)$. Además, como f es sobreyectiva, existe $a \in A$, tal que $f(a) = B$. Veamos que $a \in B$ o $a \notin B$

  - $c \in C \Rightarrow c \notin f(c) = C \Rightarrow c \notin C \;\; \rightarrow\leftarrow$
  - $c \notin C \Rightarrow c \in f(c) = C \Rightarrow c \in C \;\; \rightarrow\leftarrow$

  Por lo que la biyección no existe.

Con lo que acabamos de demostrar, concluimos que $|A| < |\mathbb{P}(A)|$

■

Con esto podemos sacar dos conclusiones interesantes. Primero, tenemos que no hay un infinito que es el mas «grande» (pues cualquier candidato que tengamos tiene menor cardinalidad que su conjunto de partes). Y la otra es que, !tenemos infinitos infinitos!.

7. Ejercicios propuestos

1. Demostrar que el conjunto de naturales impares es infinito numerable

2. Demostrar que $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & si \quad x \in (-1, 0) \\ \\ \frac{x}{1-x} & si \quad x \in (0, 1) \end{cases}$$

   es biyección entre (-1,1) y los reales. ¿Qué se puede concluir de este hecho?

3. Investigar acerca de "La hipótesis del continuo", que nos indica que $|\mathbb{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. *Como dato de su historia, Cantor trató de demostrarlo por varios años, pero falleció sin poder hacerlo.*

Referencias

[1] Eric Goles Chacc. *Álgebra*. 1.ª ed. Ediciones Dolmen, 1993. Cap. 4.